ENSA - Kenitra

Contrôle Continu du 23/04/2016

Question préliminaire. - Prouver que $\dfrac{2a}{a^2+4\pi^2x^2} \rightleftharpoons e^{-a|x|}$, $a>0$, justifier

1°) i) Prouver que toute fonction $(x,y) \longmapsto C\, e^{-|\omega| y}\, e^{i\omega x}$; $C, \omega \in \mathbb{R}$, est une solution élémentaire de $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$ pour $y \geq 0$; de sorte que la solution générale est $V(x,y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} C(\nu)\, e^{-2\pi|\nu| y}\, e^{2i\pi\nu x}\, d\nu$ (justifier)

ii) Avec la Condition aux limites $V(x,0) = f(x)$ avec $f \in L^1(\mathbb{R})$, prouver que $f(x) \rightleftharpoons C(\nu)$. En déduire que

$$V(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi|\nu| y}\, e^{2i\pi\nu(x-u)}\, d\nu \right] f(u)\, du$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(u) \frac{y}{(x-u)^2+y^2}\, du$$

. Où intervient $f \in L^1(\mathbb{R})$?

2°) Soit $y(x,t)$ une solution de $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$, $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. $y(x,0) = f(x)$ et $\dfrac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0$. $y(x,t) \rightleftharpoons \hat{y}(\nu, t)$

Prouver que $\hat{y}(\nu,t)$ satisfait une éq. diff à expliciter. La résoudre et Prouver alors que $y(x,t) = \dfrac{1}{2}\left[f(x-at) + f(x+at) \right]$. Interpréter.

3°/ i) Déterminer et Construire le spectre du signal $t \longmapsto f(t) = |\sin \pi t|$

ii) Calculer son taux d'ondulation et son taux d'harmonique et en donner des interprétations.

iii) Ecrire $\cos 2\pi n t$ sous forme d'un polynôme P_n en $x = \sin \pi t$

iv) En déduire que $|x| = \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{P_n(x)}{4n^2-1}$ et expliciter P_1, P_2, P_3. P_{2m} ?

ENSA - Kenitra

Traitement de Signal

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ un signal à spectre borné ie supp $\hat{f} \subset [-F_0, F_0]$, F_0

1°) Soit $\nu \longmapsto (2i\pi\nu)\, e^{i\pi\nu/2F_0}$ si $\nu \in [-F_0, F_0]$, $2F_0$-périodique

calculer les Coefficients C_n correspondant.

En déduire que $2i\pi\nu\, e^{i\pi\nu/2F_0} = + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{8F_0}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} e^{in\pi\nu/F_0}$

pour $\nu \in [-F_0, F_0]$. Préciser la nature de la Convergence.

2°) Prouver que $f'(x) = \int_{-F_0}^{F_0} (2i\pi\nu)\, \hat{f}(\nu)\, e^{2i\pi\nu x}\, d\nu$ (f étant C^1)

en déduire que $f'(x) = \int_{-F_0}^{F_0} \underbrace{(2i\pi\nu)\, e^{i\pi\nu/2F_0}}_{g(\nu)}\, \hat{f}(\nu)\, e^{2i\pi\nu(x - \frac{1}{4F_0})}\, d\nu$

et que

$f'(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{8F_0}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} f\left(x + \frac{2n-1}{4F_0}\right)$

3°) On suppose $|f(x)| \leq M \ \forall x$; Prouver que $|f'(x)| \leq 2\pi F_0 M$ (Bernstein)

4°) ~~Mont~~ f est C^n et Prouver que $|f^{(n)}(x)| \leq (2\pi F_0)^n M$.

5°) Soit Δt le temps de réponse d'un amplificateur au signal $U(t)$

et M le max. de la sortie. Prouver que

$$\frac{S(\Delta t) - S(0)}{\Delta t} \leq 2\pi F M \text{ où } F \text{ est la fréquence}$$

de Coupure de l'ampli. En déduire que $\Delta t \geqslant \frac{1}{2\pi F}$.

On rappelle que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{4}$.